DOI:10.13652/j.issn.1003-5788.2019.07.020

NURBS 曲线在罗茨泵转子型线设计中的应用

Application of NURBS curve in rotor profile design of roots pump

刘振超[1] 何雪明[1] 黄海楠[2]

LIU Zhen-chao[1] *HE Xue-ming*[1] *HUANG Hai-nan*[2]

(1. 江南大学江苏省食品先进制造装备技术重点实验室,江苏 无锡 214122;
2. 三一重机有限公司,江苏 苏州 215300)

(1. *Jiangsu Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment and Technology, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu* 214122, *China*; 2. *Sany Heavy Machinery Co., Ltd., Suzhou, Jiangsu* 215300, *China*)

摘要:将 NURBS 曲线运用到罗茨泵转子型线的设计中,设计了叶峰曲线的合理区域。求解了 NURBS 曲线的包络条件,实现了由控制点和权因子决定 NURBS 曲线罗茨泵转子型线的方法。该方法重新设计了渐开线型转子型线,平均误差在 0.1 μm 内,处于合理误差范围内,验证了 NURBS 曲线设计罗茨泵转子型线的可行性。并利用 NURBS 曲线局部可调的特性,对转子型线进行了改进优化,使转子型线的面积利用系数提高了 1%,为罗茨泵转子型线设计提供了一种理论和方法。

关键词:罗茨泵转子型线;NURBS 曲线;性能优化

Abstract: A design method of roots pump rotor profile based on NURBS curve was proposed. Combining the design process from peak curve to valley curve, the reasonable design area of peak curve was designed, and the envelope condition of NURBS curve was solved. The method of determining the rotor profile of roots pump with NURBS curve by control point and weight factor was designed. The method redesigned the involute rotor profile and the average error was in 0.1 μm which was in a reasonable error range. The feasibility of designing Roots pump rotor profile with NURBS curve was verified. Finally, the involute rotor profile was improved and optimized by using the local adjustable characteristic of NURBS curve. The area utilization factor of the rotor profile was increased by 1%. This provides a theory and method for the design of the rotor profile of Roots pump.

Keywords: roots pump rotor profile; NURBS curve; performance optimization

罗茨泵是一种无内压缩的旋转变容积式泵,在食品、化工、医药等行业中的真空蒸馏、浓缩、干燥等工艺过程中得到广泛应用[1]。其核心零部件为内部一对沿相反方向同步旋转的转子。罗茨泵在工作过程中借助于转子转动过程中与转子腔形成的多个基元容积实现抽气功能。转子截面形状即转子型线,其优劣直接决定了整个罗茨泵设备的工作性能。

Tsay 等[2]提出了叶峰曲线为单圆弧、叶谷曲线为圆弧共轭曲线的罗茨风机转子型线,并建立了转子型线的方程。Hsieh 等[3]尝试用渐开线设计罗茨风机的转子,并通过试验证明了使用渐开线转子型线的罗茨风机拥有更高的容积利用效率。Tong 等[4]根据偏差函数推导了罗茨泵的一般流量公式,并提出了一种根据给定流量方程设计罗茨泵转子型线的方式。Hsieh 等[5]提出了用可变摆线比的摆线设计罗茨泵转子型线的设计方法,并以基于三次、五次、七次的多项式和正弦函数的摆线比的摆线设计转子型线。Cai 等[6]提出了一种从叶峰曲线到叶谷曲线分别为圆弧、偏心圆弧、摆线、圆弧组成的罗茨泵转子型线。

目前罗茨泵转子型线上应用比较广泛的是圆弧、摆线、渐开线。用此类曲线设计转子型线时,当叶峰曲线为由多段曲线构成时,设计效率低下;转子型线的线型一旦选定,在有限空间内修改较繁琐。而 NURBS 曲线(Non-Uniform Rational B-Splines)具有能够表达常规二次曲线的特性,且 NURBS 曲线具有二次曲线不具备的局部修改性。本研究拟将 NURBS 曲线运用到罗茨泵转子型线的设计中,旨在实现罗茨泵转子型线表达方式的统一,并利用其局部修改性设计出性能更加优异的转子型线。

1 罗茨泵转子型线设计原理

罗茨泵两个转子形状相同,且在每个齿上的齿廓亦相同,而每个齿上的齿廓又为轴对称,故设计罗茨泵转子型线实际上就是设计罗茨泵转子半个齿上的曲线(即叶峰曲

基金项目:国家自然科学基金项目(编号:51275210)
作者简介:刘振超,男,江南大学在读硕士研究生。
通信作者:何雪明(1966—),男,江南大学教授,博士。
E-mail:hxuem2003@163.com
收稿日期:2019-03-11

线和叶谷曲线)。而在设计罗茨泵转子型线前需先确定罗茨泵转子型线的设计范围,如图 1 所示,齿顶圆半径 R_a、节圆半径 R、叶峰曲线(叶谷曲线)起点与终点占据节圆的圆心角 γ,都将影响叶峰曲线、叶谷曲线的设计范围。故在转子型线设计中,需先确定此类参数。节圆半径 R 为中心距 H 的 1/2,夹角 γ 和转子齿数 Z 应满足 $\gamma=\frac{\pi}{2Z}$。

通过确定转子齿数 Z、中心距 H 和齿顶高 R_a 可以确定叶峰曲线和叶谷曲线的设计范围。在设计型线时为了保证转子与转子之间每一个啮合点的间隙均匀且保持恒定,叶峰曲线 A_1C_1 和叶谷曲线 C_1E_1 都是共轭的,所以叶谷曲线 C_1E_1 通过包络条件可计算求得,故只设计叶峰曲线 A_1C_1。

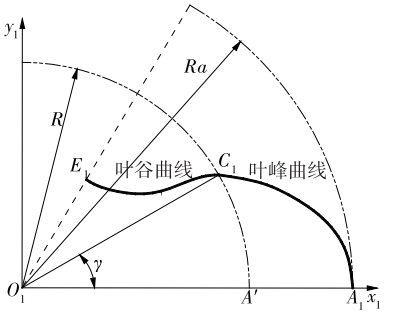


图 1　罗茨泵转子型线设计图

Figure 1　Rotor profile design of roots pump

1.1　转子型线设计的坐标系及坐标转换

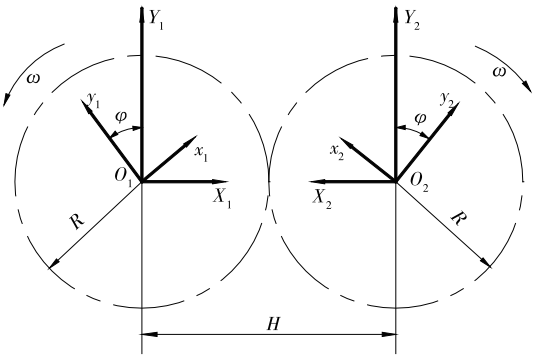
在叶峰曲线设计完后,通过包络条件式求叶谷曲线,必须建立如图 2 所示的坐标系。其中包含了两对坐标系,分别为:① 固结在罗茨泵泵体上的左侧转子的静坐标系 $O_1X_1Y_1$ 和右侧转子的静坐标系 $O_2X_2Y_2$;② 固结在转子上的左侧转子的动坐标系 $O_1x_1y_1$ 和右侧转子的动坐标系 $O_2x_2y_2$。左侧转子的动、静坐标系和右侧转子的动、静坐标系分别拥有共同的原点 O_1、O_2,O_1、O_2 分别处于两个转子的旋转中心上,区别在于静坐标系 $O_1X_1Y_1$ 和 $O_2X_2Y_2$ 是固结在泵体上,不随着转子的转动而发生任何位置变化,而动坐标系 $O_1x_1y_1$ 和 $O_2x_2y_2$ 是固结在转子上,随着转子的转动发生相应角度的转动。左侧转子逆时针转动,右侧转子顺时针转动。需进一步说明的是转子型线的设计为二维问题,故本设计方法中未涉及到 Z 轴。

根据转子的啮合原理可以得到以下不同坐标系之间的表达关系[7]:

(1) 在左侧转子静坐标系 $O_1X_1Y_1$ 中表达左侧转子动坐标系 $O_1x_1y_1$ 中的元素:

$$\begin{cases} X_1=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi; \\ Y_1=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi。 \end{cases} \tag{1}$$

(2) 在右侧转子静坐标系 $O_2X_2Y_2$ 中表达右侧转子动坐标系 $O_2x_2y_2$ 中的元素:



φ 表示左侧转子和右侧转子的转角;ω 表示转子旋转的角速度

图 2　罗茨泵转子坐标关系

Figure 2　Rotor coordinates of roots pump

$$\begin{cases} X_2=x_2\cos\varphi-y_2\sin\varphi; \\ Y_2=x_2\sin\varphi+y_2\cos\varphi。 \end{cases} \tag{2}$$

(3) 在左侧转子静坐标系 $O_1X_1Y_1$ 中表达右侧转子静坐标系 $O_2X_2Y_2$ 中的元素:

$$\begin{cases} X_1=H-X_2; \\ Y_1=Y_2。 \end{cases} \tag{3}$$

(4) 在左侧转子动坐标系 $O_1x_1y_1$ 中表达右侧转子动坐标系 $O_2x_2y_2$ 中的元素:

$$\begin{cases} x_1=-x_2\cos2\varphi+y_2\sin2\varphi+H\cos\varphi; \\ y_1=x_2\sin2\varphi+y_2\cos2\varphi-H\sin\varphi。 \end{cases} \tag{4}$$

(5) 在右侧转子动坐标系 $O_2x_2y_2$ 中表达左侧转子动坐标系 $O_1x_1y_1$ 中的元素:

$$\begin{cases} x_2=-x_1\cos2\varphi+y_1\sin2\varphi+H\cos\varphi; \\ y_2=x_1\sin2\varphi+y_1\cos2\varphi-H\sin\varphi。 \end{cases} \tag{5}$$

左侧转子的叶峰曲线的参数方程为:

$$\begin{cases} x_1=x_1(t); \\ y_1=y_1(t), \end{cases} \tag{6}$$

式中:

$t_s\leqslant t\leqslant t_e$($t_s$,$t_e$ 分别为叶峰曲线段系数 t 的起始值和终止值)。

将式(6)代入式(4)中,可以得到叶峰曲线段在对应的右侧转子上的叶谷曲线段的方程为:

$$\begin{cases} x_2=x_2(t,\varphi); \\ y_2=y_2(t,\varphi)。 \end{cases} \tag{7}$$

根据包络条件可以求得 φ 关于曲线参数 t 的表达式:

$$\varphi=\begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{kx_1x'_1+ky_1y'_1}{H\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}\right)-\arctan\left(\dfrac{x'_1}{y'_1}\right), \\ \quad y'_1>0; \\ \arccos\left(\dfrac{kx_1x'_1+ky_1y'_1}{H\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}\right)+\arctan\left(\dfrac{y'_1}{x'_1}\right), \\ \quad y'_1\leqslant0 \text{ 且 } x'_1\geqslant0; \\ \arccos\left(-\dfrac{kx_1x'_1+ky_1y'_1}{H\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}\right)+\arctan\left(\dfrac{y'_1}{x'_1}\right), \\ \quad y'_1<0 \text{ 且 } x'_1<0。 \end{cases} \tag{8}$$

式(8)称为包络条件式。通过包络条件式得到 φ 后，再代入式(5)中即可得到右侧转子的叶谷曲线方程。

此时求得的叶谷曲线为右侧转子的叶谷曲线，而最终需要得到的是左侧转子的叶谷曲线，故还需将右侧转子的叶谷曲线进一步换算成左侧转子的叶谷曲线。若将动坐标系 $O_1x_1y_1$，$O_2x_2y_2$ 重叠，将左侧转子的叶峰曲线和右侧转子的叶谷曲线统一到同一个坐标系中表达可得如图 3 所示的图形，此时右侧转子的叶谷曲线和左侧转子的叶谷曲线为关于直线 $y=x\times\tan\gamma$ 对称的曲线，故可以通过镜像矩阵 $\boldsymbol{M}1$ 得到左侧转子的叶谷方程：

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos2\gamma & \sin2\gamma \\ \sin2\gamma & -\cos2\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} 。 \tag{9}$$

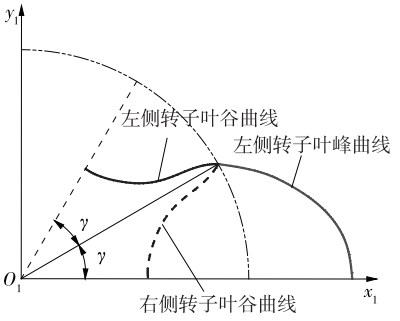


图 3　左侧转子和右侧转子的叶谷曲线关系图

Figure 3　Valley curves of left and right rotors

故可以在设计完转子的叶峰曲线方程的情况下，通过计算得到转子叶谷曲线的方程。

1.2　叶峰曲线合理设计区域的推导

在设计罗茨泵转子型线时，第一步为确定叶峰曲线，为了避免叶峰曲线数据一开始就设计不合理，直到该段曲线设计完才发现转子型线的错误，导致转子型线的设计效率降低。故本研究针对转子的叶峰曲线的设计区域进行框定，以指导转子型线的设计参数选取，提高设计效率。为了设计方便，将转子叶峰曲线都设计在第一象限和坐标轴上，转子的叶峰曲线的起点都设计在 O_1x_1 轴上。

如图 4 所示，由于转子叶峰曲线自身位置的布局特点，叶峰曲线必须处于节圆弧 $O_1A'C$ 右侧、齿顶圆弧 O_1AF 左侧、线段 $A'A$ 上方、线段 CF 下方。得出叶峰曲线的基本设计区域：

(1) 叶峰曲线处于 $O_1A'C$ 右侧：

$$x_1^2+y_1^2\geqslant R^2, x_1\in\left[R\cos\frac{\pi}{2Z}, R\right] 。 \tag{10}$$

(2) 叶峰曲线处于 O_1AF 左侧：

$$x_1^2+y_1^2\leqslant R_a^2, x_1\in\left[R_a\cos\frac{\pi}{2Z}, R_a\right] 。 \tag{11}$$

(3) 叶峰曲线处于线段 $A'A$ 上方：

$$y_1\geqslant 0。 \tag{12}$$

(4) 叶峰曲线处于线段 CF 下方：

$$y_1-\tan\frac{\pi}{2Z}\times x_1\leqslant 0, x_1\in\left[R\cos\frac{\pi}{2Z}, R_a\cos\frac{\pi}{2Z}\right]。 \tag{13}$$

转子叶峰曲线和对应的节圆段存在一种映射关系，理论上叶峰曲线映射到节圆弧段 $O_1A'C$ 上，恰好得到完整的节圆弧段，若映射得到的曲线出现重叠，则会产生封闭容积，为了避免此类情况，并将情况推至极限，则叶峰曲线映射得到的曲线只为一点，而考虑叶峰曲线在 A 点的连续性要求，故映射得到的点只能是 A' 点，满足情况的叶峰曲线如图 4 中的销齿圆弧 $A'AG$，即叶峰曲线设计的下边界。

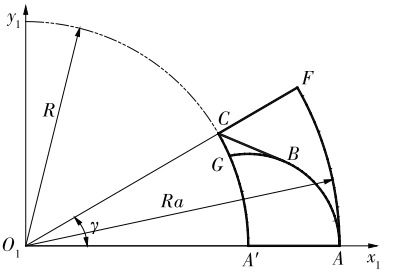


图 4　转子型线设计的基本区域的确定

Figure 4　Determination of basic area for rotor profile design

下边界销齿圆弧 $A'AG$ 的数学表达式如下：

$$(x-R)^2+y^2\geqslant(R_a-R)^2, x\in[R, R_a]。 \tag{14}$$

同时转子的封闭性限定了转子的叶峰曲线和叶谷曲线必然是首尾相接，故叶峰曲线必然过 C 点；转子的连续性限定叶峰曲线为多段时，各曲线之间必须至少保证相切连续。叶峰曲线若完全采用销齿圆弧，叶峰曲线的终点不能到达设计终点 C 点，故在式(12)限定的叶峰曲线合理设计区域的下边界的基础上可以进一步缩小设计区域的左边界，叶峰曲线至少由两段曲线组成，如图 4 所示，保证第一段曲线为销齿圆弧最长为 $A'AB$，第一段曲线外的曲线为直线段 BC。

转子型线的合理设计区域的左边界 ABC，数学表达式为：

$$(y-R\sin\frac{\pi}{2Z})-k_3(x-R\cos\frac{\pi}{2Z})\geqslant 0, \tag{15}$$

式中：

$$x\in\{R\cos\frac{\pi}{2Z}, (R_a-R)\cos[\arcsin(\frac{R_a}{R}-1)-\arcsin(\frac{-\sqrt{2-2\cos(\frac{\pi}{2Z})}}{2})]+R\};$$

$$k_3=\cot[\arcsin(\frac{-\sqrt{2-2\cos(\frac{\pi}{2Z})}}{2})-\arcsin(\frac{R_a}{R}-1)]。$$

通过以上的约束条件便得到叶峰曲线的合理设计范围,如图 5 中粗虚线标出的区域所示,图 5 中同时标出了圆弧型转子型线、摆线型转子型线、渐开线型转子型线的叶峰曲线和该合理设计范围的关系。从图 5 可知,几种典型的转子型线的叶峰曲线均设计在合理设计区域内。本研究提出的叶峰曲线的合理设计区域虽不能保证设计在其内部的齿廓都是合格的,但能保证未设计在合理设计范围区域内的转子型线一定为不合格的。

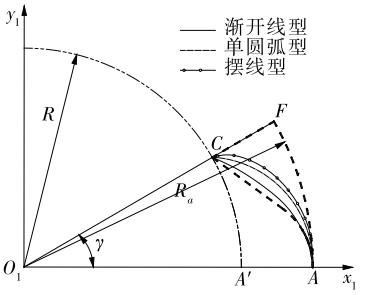


图 5　典型转子型线与合理设计区域的关系

Figure 5　The relationship between typical rotor profile and reasonable design area

2　NURBS 曲线设计转子型线的方法

2.1　包络条件求解

一段 k 次 NURBS 曲线的函数定义为[8]:

$$C(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n}N_{i,k}(u)w_iP_i}{\sum_{i=0}^{n}N_{i,k}(u)w_i},a\leqslant u\leqslant b, \tag{16}$$

式中:

u——NURBS 曲线中的参数;

k——曲线次数;

P_i——控制点,控制点的个数为 $n+1$;

w_i——控制点的权因子,决定了控制点偏离曲线的程度,控制点的个数为 $n+1$,所以 $w_i>0$;

$N_{i,k}(u)$——定义在非周期且非均匀节点矢量 $\boldsymbol{U}=\{a,\cdots,a,u_{k+1},\cdots,u_{m-p-1},b,\cdots,b\}$上的 k 次 B 样条基函数,节点矢量 $\boldsymbol{U}$ 中的元素称为节点,节点矢量中节点的个数为 $m+1$,而参数 m 满足 $m=n+k+1$。

NURBS 曲线在进行罗茨泵转子型线设计中使用相对容易,给定了 NURBS 曲线的次数 k、控制点 P_i、控制点对应的权因子 w_i 后,左侧转子的叶峰曲线方程可表达为:

$$\begin{cases}x_1=C_x(u);\\ y_1=C_y(u),\end{cases} \tag{17}$$

式中:

$0\leqslant u\leqslant 1$。

将式(15)代入式(6)中可以得到 NURBS 曲线的包络条件式:

$$\varphi=\begin{cases}\arcsin\left[\dfrac{kC_x(u)C'_x(u)+kC_y(u)C'_y(u)}{H\sqrt{C'^2_x(u)+C'^2_y(u)}}\right]-\arctan\left[\dfrac{C'_y(u)}{C'_x(u)}\right],\\ C'_y(u)>0;\\ \arccos\left[\dfrac{kC_x(u)C'_x(u)+kC_y(u)C'_y(u)}{H\sqrt{C'^2_x(u)+C'^2_y(u)}}\right]+\arctan\left[\dfrac{C'_y(u)}{C'_x(u)}\right],\\ C'_y(u)\leqslant 0\text{ 且 }C'_x(u)\geqslant 0;\\ \arccos\left[-\dfrac{kC_x(u)C'_x(u)+kC_y(u)C'_y(u)}{H\sqrt{C'^2_x(u)+C'^2_y(u)}}\right]+\arctan\left[\dfrac{C'_y(u)}{C'_x(u)}\right],\\ C'_y(u)<0\text{ 且 }C'_x(u)<0,\end{cases} \tag{18}$$

式中:

$$C'_x(u)=\frac{\mathrm{d}C_x(u)}{\mathrm{d}u},C'_y(u)=\frac{\mathrm{d}C_y(u)}{\mathrm{d}u}。$$

将式(17)设计的 NURBS 曲线的叶峰转子型线方程和 NURBS 曲线设计转子型线时的包络条件式(18)代入式(4)可以得到右侧转子上的叶谷曲线方程。式(18)中涉及到 NURBS 曲线的求导,与传统圆锥曲线的求导是有区别的。

2.2　NURBS 导数的推导

在式(16)中,令 $A(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)w_iP_i$,$K(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)w_i$,则 NURBS 曲线的表达式可改写为:

$$C(u)=\frac{A(u)}{K(u)}。 \tag{19}$$

故 NURBS 曲线的一阶导数可以表达为:

$$C'(u)=\frac{K(u)A'(u)-K'(u)A(u)}{K(u)^2}=\frac{K(u)A'(u)-K'(u)K(u)C(u)}{K(u)^2}=\frac{A'(u)-K'(u)C(u)}{K(u)}。 \tag{20}$$

式(20)中在求解 $A(u)$ 和 $K(u)$ 的一阶导数时,实质上只需对其公式内部的基函数求解:

$$\begin{cases}A'(u)=\sum_{i=0}^{n}N'_{i,k}(u)w_iP_i;\\ K'(u)=\sum_{i=0}^{n}N'_{i,k}(u)w_i。\end{cases} \tag{21}$$

基函数的求导类似于基函数的求解,为一个递推公式,需要从低阶到高阶逐层计算:

$$N'_{i,k}(u)=\frac{k}{u_{i+k}-u_i}N_{i,k-1}(u)-\frac{k}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}N_{i+1,k-1}(u)。 \tag{22}$$

由此便可计算出 NURBS 曲线的一阶导数的求导。

3　基于 NURBS 曲线的转子型线设计

在常用的罗茨泵转子型线中，渐开线型转子型线的罗茨泵在面积利用系数上要高于单圆弧型转子型线，故理论抽气速率也是渐开线型的要高。本研究基于 NURBS 曲线的局部修改性和前文提出的叶峰曲线合理设计区域，在渐开线型转子型线的基础上，对转子型线进行改进设计，以期获得面积利用系数更高的罗茨泵转子型线。面积利用系数能直接反映罗茨泵的抽气速率。根据罗茨泵转子的面积利用系数 λ 的定义，得到面积利用系数的公式：

$$\lambda = \frac{S_0 - S}{S_0} = 1 - \frac{S}{\pi \times R_a^2}, \tag{23}$$

式中：

S_0——罗茨泵转子旋转 1 周，其齿顶圆半径经过的面积，即 $S_0 = \pi \times R_a^2$；

S——罗茨泵转子的横截面面积。

NURBS 曲线设计转子型线流程，首先确定了转子的齿顶高、中心距、转子齿数。再利用 NURBS 曲线设计叶峰曲线 A_1C_1，根据叶峰曲线 A_1C_1 的数据计算叶谷曲线 C_1E_1，获得整条转子型线数据，若满足要求，则输出型线数据，若不符合设计要求，则需要修改设计参数，重新计算。

3.1　渐开线型转子型线的复现

由于 NURBS 曲线对渐开线无法完美表达，故只能通过调整次数与控制点数对 NURBS 曲线进行拟合，使其与渐开线的误差保证在允许误差之内。因此 NURBS 曲线设计的渐开线转子型线在叶峰曲线上存在一定的误差，使得通过计算得到的叶谷曲线也存在误差，既而在用 NURBS 曲线复现渐开线型转子型线后，有必要对叶峰曲线和叶谷曲线进行误差分析。

对限定区域下渐开线转子型线的叶峰曲线用 NURBS 曲线进行拟合，采用四次 NURBS 曲线，并通过 5 个控制点对曲线进行控制，如图 6 所示，数据见表 1。渐开线转子型线中销齿圆弧部分可以使用 NURBS 曲线表达[9]，误差如表 2 所示，复现销齿圆弧部分可以做到无误差；拟合的渐开线转子型线渐开线部分的平均误差为 8.332×10^{-2} μm，最大误差为 1.773×10^{-1} μm；通过拟合的 NURBS 曲线计算得到的叶谷曲线的数据和原曲线的数据经过比对，平均误差为 1.041×10^{-1} μm，最大误差为 3.509×10^{-1} μm。可以看出，通过 NURBS 曲线设计的渐

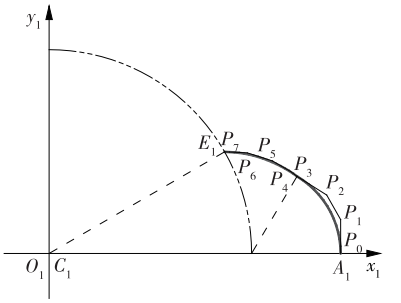


图 6　叶峰曲线控制点图

Figure 6　Control point chart of leaf peak curve

表 1　渐开线型转子型线叶峰曲线的设计参数对比

Table 1　Comparison ofdesign parameters of involute rotor profile blade peak curve　　mm

A_1B_1		B_1C_1	
圆弧	三次 NURBS 曲线	渐开线	四次 NURBS 曲线
起点	控制点 1/权因子	起点	控制点 1/权因子
(72.272 1,0.000 0)	[(72.272 1,0.000 0)/1.000 0]	(61.706 2,118.947 6)	[(61.706 2,118.947 6)/1.000 0]
终点	控制点 2/权因子	终点	控制点 2/权因子
(61.706 2,18.947 6)	[(72.272 1,6.128 3)/0.658 0]	(43.301 3,25.000 0)	[(56.300 2, 22.288 9)/1.000 0]
半径	控制点 3/权因子	基圆半径	控制点 3/权因子
22.272 1	[(66.919 8,15.726 6)/0.658 0]	42.536 6	[(51.133 6,24.170 1)/1.000 0]
	控制点 4/权因子	偏转角	控制点 4/权因子
	[(61.706 2,118.947 6)/1.000 0]	5.398 4°	[(46.739 4,24.896 3)/1.000 0]
			控制点 5/权因子
			[(43.301 3,25.000 0)/1.000 0]

表 2　曲线设计的误差分析

Table 2　Erroranalysis of curve design　　μm

项目	A_1B_1 三次 NURBS 曲线	B_1C_1 四次 NURBS 曲线	C_1D_1	D_1E_1
最大误差	0	1.773×10^{-1}	3.509×10^{-1}	0
平均误差	0	8.332×10^{-2}	1.041×10^{-1}	0

开线型转子型线的叶峰曲线和叶谷曲线的误差均低于抛光的加工精度,该误差在合理误差范围内,实现了用 NURBS 曲线对渐开线型转子型线的复现。

3.2 基于 NURBS 曲线的转子型线改进设计

首先确定转子的齿顶圆半径 R_a 为 72.272 1 mm、中心距 H 为 100 mm、转子齿数 Z 为 3。面积利用系数是罗茨泵转子性能的决定性因素,增加面积利用系数,能够有效提高罗茨泵性能。设计罗茨泵转子型线时,在无法得知叶谷曲线 C_1E_1 的情况下,控制叶峰曲线 A_1C_1 尽量与合理设计区域边界靠近也是减小转子面积的一种有效途径。在渐开线型转子型线的叶峰曲线设计图上架构出叶峰曲线合理设计区域,如图 7 所示,渐开线转子型线的第 1 段销齿圆弧 $A'A_1B_1$ 为处于合理设计区域的下边界圆弧 $A'AB$ 上的,销齿圆弧 $A'A_1B_1$ 的圆心角大小为 58.587°,边界圆弧 $A'AB$ 的圆心角为 74.376°,由此可发现转子型线的第 1 段销齿圆弧具备延长使用长度的可能。基于此,采用两段式的叶峰曲线设计手段。叶峰曲线的第 1 段仍然沿用销齿圆弧,但销齿圆弧的使用长度将增加;第 2 段叶峰曲线则采用 NURBS 曲线进行架构,并利用 NURBS 曲线的局部可调性调整第 2 段叶峰曲线的形状,使设计完的转子型线拥有最高的面积利用系数。

本研究中选用修改权因子的方式,确定了控制点后只要定量修改其对应的权因子参数即可。对第 1 段叶峰曲线段(销齿圆弧)的设计策略为:设置 9 组试验,第 1 组试验中第 1 段销齿圆弧仍采用圆弧 $A_1'A_1B_1$,第 1 组以后每组的第 1 段销齿圆弧比前一组的销齿圆弧的圆心角多使用 1.974°,这样第 9 组中的第 1 段销齿圆弧刚好为合理设计区域的下边界——销齿圆弧 $A'AB$。

对第 2 段叶峰曲线段采用 NURBS 曲线的设计策略为:NURBS 曲线次数采用了三次,并由 4 控制点进行控制,针对第 1 段销齿圆弧的使用长度,第 2 段曲线通过一维搜索的方法对第 2 段 NURBS 曲线的中间两个控制点对应的权因子进行调控,从而获得每组中面积利用系数最高的权因子组合。

实际设计发现第3组试验之后的组别无论如何调整

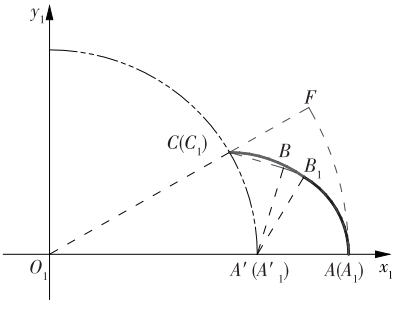


图 7　渐开线转子叶峰曲线图

Figure 7　Peak curve of involute rotor blade

表 3　改进的转子型线性能参数对比

Table 3　Comparisons of linear performance parameters of improving rotor shapes

组别	销齿圆弧使用角度/(°)	面积利用系数/%
单圆弧型	0.000	48.40
渐开线型	58.587	48.86
第 1 组 NURBS 曲线型	58.587	48.91
第 2 组 NURBS 曲线型	60.511	49.10
第 3 组 NURBS 曲线型	62.434	49.06

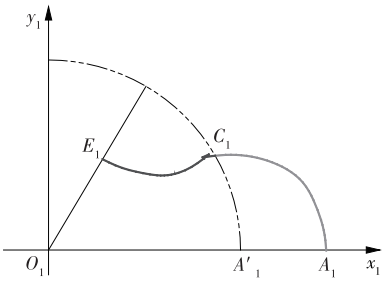


图 8　转子型线的根切图

Figure 8　Undercut of rotor profile

第 2 段的 NURBS 曲线,都会出现根切的现象,如图 8 所示。故只对前 3 组试验的结果进行了总结,得到表 3 的试验结果。通过对表中的数据可以看出,改进的 NURBS 曲线型转子型线中面积利用系数最高的为第 2 组,高出渐开线转子型线 0.53%,高出单圆弧型转子型线 1.45%。其转子型线叶峰曲线数据如表 4 所示,转子型线如图 9 所示。

4　结论

(1) 设计罗茨泵转子型线叶峰曲线合理区域,便于指导转子型线参数选取,对转子型线的改进设计开发具备一定的指导作用,提高设计效率。

(2) 针对渐开线型转子型线,用一整段 NURBS 曲线表达叶峰曲线,由控制点和权因子决定,得到了误差最大为 1.041×10^{-1} μm 的型线,验证了用NURBS进行型线

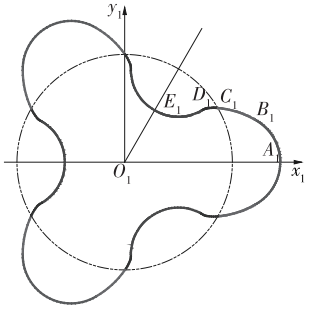


图 9　改进的 NURBS 型转子型线

Figure 9　Improved NURBS rotor profile

表 4　改进的 NURBS 型转子型线叶峰曲线数据

Table 4　Improved NURBS rotor profile peak curve data

mm

A_1B_1(圆弧)	B_1C_1(三次 NURBS 曲线)
起点(72.272 1，0.000 0)	控制点 1/权因子[(61.034 2，19.346 6)/1.000 0]
终点(61.034 2，19.346 6)	控制点 2/权因子[(57.341 3，21.425 9)/1.400 0]
半径 22.272 1	控制点 3/权因子[(51.350 3，23.362 9)/1.500 0]
	控制点 4/权因子[(43.301 3，0.000 0)/1.000 0]

设计的可行性。增加了罗茨泵转子型线设计的曲线类型。结合叶峰曲线合理设计区域，利用 NURBS 曲线局部调整性对型线进行优化，最终得到了优化后的型线，型线的面积利用系数得到了提高，提高了罗茨泵性能。

(3) 结合 NURBS 曲线设计转子型线，优势在于 NURBS 曲线的便捷的局部调整性，研究中只通过修改权因子的方式调控曲线，为了最大化利用 NURBS 曲线的形状调整工具，今后应同时结合调整控制点的方法设计转子型线。

参考文献

[1] 刘新. 罗茨泵在化工生产中的应用[J]. 化学工程与装备，2009(4)：78-87.

[2] TSAY C B. Solving the conjugated curves of roots blower lobe profile by analytic method[J]. Jorunal of Machine，1987(13)：129-133.

[3] HSIEH G E，MENG J L. Computer aided design of roots blower profile[C]//Proceedings of the 1989 Technology and Occupation Education Conference at the National Taipei University of Technology，1989：69-75.

[4] TONG Shin-hsi，YANG D C H. Rotor profiles synthesis for lobe pumps with given flow rate functions[J]. Journal of Mechanical Design，2005，127(2)：287-294.

[5] HSIEH C F，HWANG Y W. Tooth profile of a roots rotor with a variable trochoid ratio [J]. Mathematical and Computer Modelling，2008，48 (1/2)：19-33.

[6] CAI Ying-jie，YAO Li-gang. Comparison analysis and verification on spur and helical three-lobe rotors with novel tooth profile in roots blower[C]//2th International Conference on Mechanical，Electronic and Information Technology Engineering，2016：418-423.

[7] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 2 版. 西安：西安交通大学出版社，2009：245-255.

[8] LES P，TILLER W. 非均匀有理 B 样条[M]. 2 版. 赵罡，穆国旺，译. 北京：清华大学出版社，2010：34-59，86-93，209-210.

[9] 刘军强，高佳宏，李言. 规则曲线和曲面的 NURBS 表示[J]. 西安工业学院学报，2004，24(4)：311-315.

(上接第 79 页)

[14] 李晓蕾，陈军，杨朝芬，等. 超高效液相色谱—串联质谱法检测辅助降血脂保健食品中 6 种非法添加化学药物[J]. 食品科学，2018，39(18)：320-325.

[15] CHEN Y，ZHAO L，LU F，et al. Determination of synthetic drugs used to adulterate botanical dietary supplements using QTRAP LC-MS/MS[J]. Food Additives and Contaminants：Part A，2009，26(5)：595-603.

[16] KIM J Y，PARK H J，KIM J W，et al. Development and validation of UPLC and LC-MS/MS methods for the simultaneous determination of anti-obesity drugs in foods and dietary supplements[J]. Archives of Pharmacal Research，2016，39(1)：103-114.

[17] 康宁，高媛惠，高利珍. 高效液相色谱—串联飞行时间质谱法检测安神类保健食品中非法添加物[J]. 食品与机械，2018，34(10)：49-54.

[18] 宫旭，芦丽，冯有龙，等. HPLC-IT-TOF-MS 快速检测减肥、降脂、降糖类保健食品中非法添加的 25 种化学药品[J]. 中国药师，2018，21(8)：1 463-1 468.

[19] 姜春来，邢俊波，靳守东. HPLC-Q-TOF 法测定降糖类中成药及保健食品中 14 种非法添加药物[J]. 解放军药学学报，2016，32(6)：514-517.

[20] 于泓，胡青，张甦，等. 超高效液相色谱—四级杆—飞行时间串联质谱法检测中药及保健食品中 21 种非法添加的降脂类药物[J]. 食品安全质量检测学报，2016，7(7)：2 704-2 709.

[21] MAKAROV A. Electrostatic axially harmonic orbital trapping：A high-performance technique of mass analysis[J]. Analytical Chemistry，2000，72(6)：1 156-1 162.

[22] 张晓光，李强，孙磊，等. 超高效液相色谱—静电场轨道阱高分辨质谱快速筛查保健品中 23 种非法添加西药成分[J]. 食品科学，2015，36(14)：187-191.

[23] 刘芸，丁涛，廖雪晴，等. 高效液相色谱—四极杆/静电场轨道阱高分辨率质谱法快速筛查中成药和保健食品中非法添加的 42 种化学药物[J]. 分析化学，2016，44(3)：423-429.

[24] 食品药品监管总局. 总局关于发布《保健食品中 75 种非法添加化学药物的检测》等 3 项食品补充检验方法的公告(2017 年第 138 号)[EB/OL]. (2017-11-17) [2019-03-01]. http://samr.cfda.gov.cn/WS01/CL0087/217375.html.

[25] 市场监管总局. 市场监管总局关于发布《食品中那非类物质的测定》食品补充检验方法的公告[EB/OL]. (2018-07-02) [2019-03-01]. http://samr.saic.gov.cn/gg/201807/t20180704_274876.html.