DOI:10.13652/j.issn.1003-5788.2022.02.024

静电场对冷冻食品冰晶生长影响的相场法模拟

Phase field simulation of the effect from electrostatic field on frozen food ice crystal growth

甄 允 苏格毅 张 雪 孙惠蕾

ZHEN Bing SU Ge-yi ZHANG Xue SUN Hui-lei

(哈尔滨商业大学能源与建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150028)

(*School of Energy and Civil Engineering, Harbin University of Commerce, Harbin, Heilongjiang* 150028, *China*)

摘要:目的:探究外加静电场对食品冷冻过程中冰晶生长的影响规律。**方法:**基于相场法中经典的 Kobayashi 模型,将电场自由能密度引入相场模型,采用有限差分法五点差分格式离散偏微分方程,编程实现了冰晶生长的模拟及可视化。**结果:**模拟结果和其他模拟结果以及试验结果呈现的冰晶组织特征一致,冰晶形态具有典型的六重对称性;随着电场强度的增加,冰晶的主枝生长速率和成核生长都受到了抑制。**结论:**在食物的速冻保鲜过程中,外加一定的电场强度,会减少大冰晶的生成,最大限度地保留食品的品质和风味。

关键词:冷冻;静电场;相场法;冰晶生长;食品品质

Abstract: Objective: In order to explore the effect of an external electrostatic field on the growth of ice crystals during food freezing. **Methods:** Based on the classic Kobayashi model of phase field method, the free energy density of electric field was introduced into the phase field model. Used the five-point difference scheme in the finite difference method to discretize the partial differential equation, the simulation and visualization of ice crystal growth were realized by programming. **Results:** The results showed that the simulation results were consistent with other simulation results and experimental results, and the ice crystal morphology had a typical sixfold symmetry; With the increase of electric field intensity, the growth rate of main branches and nucleation growth of ice crystals were inhibited. **Conclusion:** In the process of quick-frozen food preservation, adding a certain electric field strength will reduce the formation of ice crystals, and retain the quality and flavor of food as much as possible.

Keywords: freezing; electrostatic field; phase field method; ice crystal growth; food quality

冷冻猪肉等食品具有易贮藏、易运输、高安全性的优势,行业在快速发展中得到了多数人的认可[1]。在冷冻过程中,冰晶多位于组织细胞外且连成片[2],大冰晶的形成会损伤肌肉组织,造成汁液的流失,而汁液流失率越大,冷冻食品容貌及品质越差。为控制大冰晶的形成,在食品冷冻过程中辅助静电场的技术成为了研究热点之一[3]。

Orlowska 等[4]发现在一定过冷度下,随着电场强度的增大,冰晶初始成核时的温度升高,并指出通过静电场控制晶核的形成是一个可行的方法。Xanthakis 等[5]研究了静电场对猪里脊肉冷冻的影响,发现在静电场冷冻情况下,猪里脊肉形成的冰晶尺寸显著减小。李侠等[6]发现使用静电场辅助牛肉的冻结—解冻,与自然冻结—解冻相比,在冻结过程中生长的冰晶体积小,均匀分布在肌肉组织内,对肌肉组织损伤小,改善了解冻牛肉的品质。魏国平等[7]发现猪肉置于静电场环境下冻结解冻可提高猪肉品质。以上研究均以试验为主,未从微观数值模拟的角度分析静电场对冰晶的影响。

相场法凭借其避免复杂界面追踪的优点,被广泛用于研究微观组织模拟[8-9]。Kobayashi[10]数值求解了各向异性条件下的二维相场模型,得到了过冷纯金属凝固的二维复杂枝晶生长形貌。Wheeler 等[11]对相场模型进行了渐近分析,再现了界面厚度逐渐消失的经典自由边界问题,并提出了 WBM 模型,定量模拟了纯镍枝晶的形成。Karma 等[12]对尖锐界面模型进行了薄界面厚度限制条件下的渐进分析,提出了界面厚度可大于毛细长度的思想,将尖锐界面模型与相场模型联系在一起。Kim 等[13]建立了可用于合金模拟的相场模型(KKS 模型),并消除了 WBM 模型中界面厚度限制。龙文元等[14]模拟了三元合金凝固过程中的界面形貌,得到了二次甚至高次枝晶臂的复杂枝晶形貌。

基金项目:黑龙江省自然科学基金联合引导项目(编号:LH2019E069)

作者简介:甄允(1973—),男,哈尔滨商业大学教授,博士(后)。E-mail:zb730812@163.com

收稿日期:2021-09-25

近年来，国内学者开始将相场模型运用到冰晶生长，并得到了良好的发展。陈梅英等[15-17]利用相场法模拟了纯水、糖水中的冰晶生长，探讨了过冷度、过冷时间以及各向异性强度对冷冻浓缩过程冰晶生长的影响。杨燕等[18]对食品速冻保鲜过程中冰晶的生长进行了相场模拟，探讨了冷冻时间步长对尖端生长速率和曲率半径的影响。韩端锋等[19-20]通过运用 Wheeler 相场模型模拟了海水六角冰晶的生长，揭示了冰晶形成机理。白旭等[21]基于 Wheeler 相场模型，使用有限差分法对不同过冷度下海水凝固形状进行模拟。将海水视为盐和纯水的二元混合物，讨论了不同过冷度对冰晶生长的影响。

研究拟借助相场模型来研究静电场作用下的冰晶微观生长过程，分析外加静电场的冷冻对食品品质的改善作用，以期为以后冷冻食品的研究提供理论基础和技术支持。

1　模型的建立

相场模型包括两个变量：相场变量 $\varphi(r,t)$ 和温度场变量 $\tilde{u}(r,t)$；相场变量 $\varphi(r,t)$ 是在位置 r 和时间 t 处的排序参数，$\varphi=0$ 表示是液体，$\varphi=1$ 是固体，φ 在 0 和 1 中间表示固液共存。温度场变量可由式(1)求得。

$$\bar{u}=\frac{T-T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{M}}-T_0}, \tag{1}$$

式中：

$\bar{u}$——无量纲温度；

T——系统的温度，K；

T_{M}——熔化温度，K；

T_0——系统的初始温度，K。

在建立模型前考虑 Ginzburg-Landau 型自由能，并引入电场能密度[22]：

$$F(\varphi,m)=\int_v\frac{1}{2}\varepsilon^2\ |\nabla\varphi|^2+f(\varphi,m)+f(\varphi,E^a)\mathrm{d}v\ , \tag{2}$$

式中：

$F(\varphi,m)$——总的自由能密度函数；

ε——关于 θ 的函数，$\varepsilon=\bar{\varepsilon}\{1+\delta\cos[j(\theta-\theta_0)]\}$；

$\bar{\varepsilon}$——各向异性梯度能量系数平均值；

δ——各向异性强度，常数；

j——各向异性模数，对于六重对称结构值取 6；

θ——界面法向与参考坐标轴的夹角，rad；

θ_0——初始偏移角，rad；

m——关于 $\bar{u}$ 的函数，$m=(\alpha/\pi)\tan^{-1}[\gamma(T_{\mathrm{eq}}-\bar{u})]$；

α——过冷系数，常数；

γ——温度放大系数，常数；

T_{eq}——无量纲平衡温度。

这里假设外加电场为恒定电场，电场正方向增加[23]，无量纲电场强度可由式(3)求得。

$$E^a=\frac{E}{(|a_0|P_0)}, \tag{3}$$

式中：

E^a——无量纲电场强度；

E——外加恒定电场的电场强度，V/m；

a_0——现象系数，$\mathrm{m^2\cdot N/C^2}$；

P_0——自发极化矢量的模，$\mathrm{C/m^2}$。

在参考 Kobayashi 模型[10]的基础上，由式(4)得出外加静电场的相场控制方程见式(5)。

$$\tau\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\partial F}{\partial\varphi}\ , \tag{4}$$

$$\tau\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\nabla\cdot(\varepsilon^2\nabla\varphi)+\varphi(1-\varphi)\left(\varphi-\frac{1}{2}+m\right)-E^a\ , \tag{5}$$

式中：

τ——时间演化系数。

根据焓守恒定律，得出无量纲温度的热扩散方程[24]：

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\nabla^2\tilde{u}+\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial t}。 \tag{6}$$

式中：

κ——潜热常值。

式(5)展示了界面层的形状、运动和位置，式(6)给出了界面层的温度[19]，二者构成了相场模型。

2　数值求解过程

2.1　初始条件与边界条件

设置液体区域初始无量纲温度为 0，而无量纲融化温度为 1，并在计算区域中心设置固定大小为 10 个网格数的圆来引入晶核。在计算区域边界，相场和温度场都采用 zero-Neumann 边界条件[17]。并设置初始条件：

$$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant r^2:\varphi=1,\tilde{u}=1\\ x^2+x^2+y^2>r^2:\varphi=0,\tilde{u}=0\end{cases}。 \tag{7}$$

在迭代计算前需要设置计算参数和物性参数。设定网格区域 $N_x\times N_y$ 为 300×300，网络间距 $\triangle x$ 与 $\triangle y$ 均为 0.03，步数设置为 4 000，时间步长 $\triangle t$ 设置为 0.000 1，时间演化系数 τ 为 0.000 3，各向异性梯度能量系数平均值 $\tilde{\varepsilon}$ 为 0.01，潜热常值 κ 为 1.8，各向异性强度 δ 为 0.02，各向异性模数 j 为 6，无量纲平衡温度 T_{eq} 为 1，过冷系数 α 为 0.9，温度放大系数 γ 为 10，初始偏移角 θ_0 为 1.57[10,24]。

2.2　离散形式

为简化计算和便于编程，用有限差分法中的向前差分形式得到了相场变量的时间离散，用中心差分格式得到了相场变量的空间离散，用五点差分格式离散了相场控制方程中出现的拉普拉斯算子。分别表示为：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\varphi_{i,j}^{n+1}-\varphi_{i,j}^{n}}{\triangle t}+o(\triangle t)\ , \tag{8}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2\triangle x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j-1}}{2\triangle y}, \tag{10}$$

$$(\nabla^2\varphi)_{i,j}=\frac{\varphi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\varphi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\varphi_{i,j}}{\triangle x\cdot\triangle y}。 \tag{11}$$

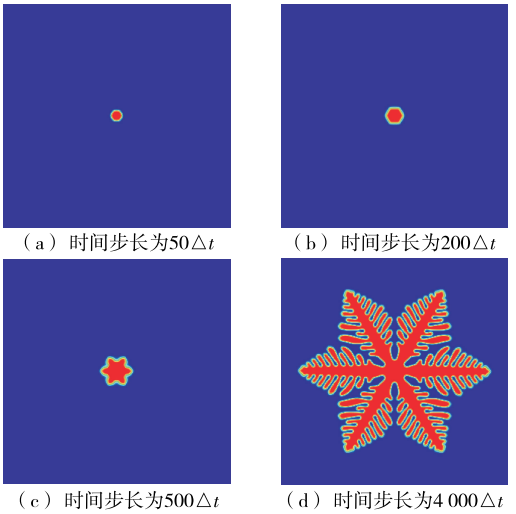
温度场方程离散形式与上述相场方程的离散形式相似。

3　模拟结果

3.1　模拟结果与试验结果对比

先对不加电场的冰晶生长进行了模拟。如图 1 所示:冰晶的生长起初是一个圆形冰核,当生长到一定半径时,逐步变为边缘光滑的正六边形,随后 6 个边的中间位置开始出现凹陷,6 个顶点处生长优势明显,逐渐发展为主枝,且边缘也较为光滑,随着时间步长的增加,冰晶形状明显变大,6 个主枝沿着轴方向延伸出边缘较为粗糙的 2 次分枝,同时主枝根部出现缩颈,主分枝变得更细,相邻主分枝的侧分枝间距变大。在模拟冰晶生长过程中,冰晶形貌具有典型的六重对称性。

陶乐仁等[25]利用低温显微镜观察了冰晶由晶核向雪花状生长的过程。通过图 1 与图 2 的对比发现,采用相场法进行模拟得到的冰晶形貌与试验结果高度相似。此外还与韩端锋等[19]采用 Kobayashi 模型模拟的六角冰晶进行了对比,如图 3(a)与图 3(b)所示,两个模拟图在形态样貌上高度相似,只有主枝生长角度、二次分枝有所不同;经对比后发现初始角度和潜热常值在数值上有所差距,初始角度影响冰晶主枝的生长方向[24],潜热常值解释了扩散层的热量释放影响着冰晶主分支的粗细和主分支间的间距[19],它们的数值对冰晶生成细节有所影响,但对



(a) 时间步长为50$\triangle t$　(b) 时间步长为200$\triangle t$　(c) 时间步长为500$\triangle t$　(d) 时间步长为4 000$\triangle t$

图 1　不加静电场的冰晶生长过程图

Figure 1　Process diagram of ice crystal growth without electrostatic field

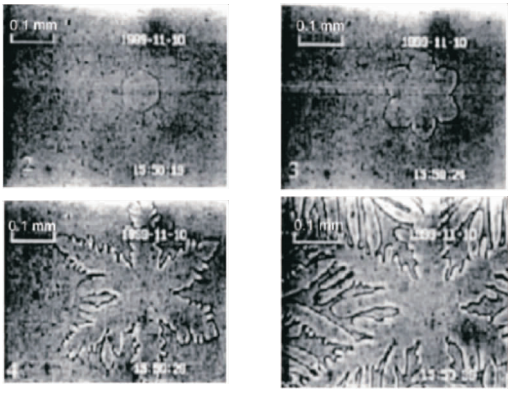
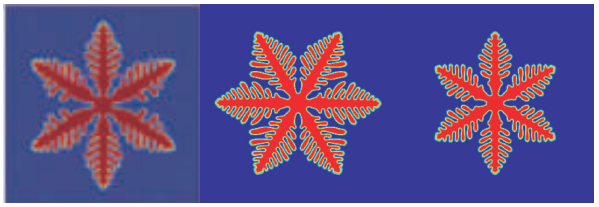


图 2　低温显微镜下冰晶生长观察图[25]

Figure 2　Observation of ice crystal growth under cryomicroscope



(a) 文献[19]　(b) 参数优化前　(c) 参数优化后

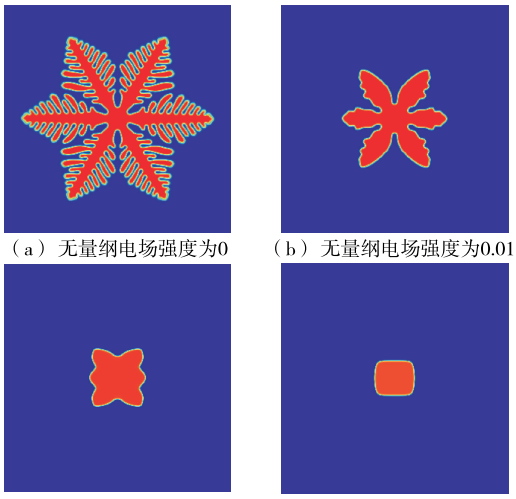
图 3　相场法模拟的冰晶充分生长后的样貌图

Figure 3　The image of the fully grown ice crystal simulated by the phase field method

冰晶相貌生成规律并无影响,图 3(c)为在编程里改变了初始角度及潜热常值后的冰晶生长图,与图 3(a)相比两个六角冰晶的形态样貌及角度基本一致。模拟结果与试验结果及其他模拟结果基本一致,这也验证了试验模型的正确性,于是开始了进一步的研究。

3.2　加静电场的冰晶生长

3.2.1　冰晶生长形貌分析　通过分析不同电场强度条件下冰晶生长的形貌来探讨无量纲电场强度对冰晶生长的影响规律。在其他条件一定的情况下,选择外加无量纲电场强度大小为 0,0.01,0.03,0.05,各无量纲电场强度对应实际电场强度分别为 0.0,1.3,3.9,6.5 kV/mm。如图 4 所示,在无量纲电场强度为 0.01 时冰晶充分生长后的形貌,与不加电场的冰晶充分生长后的形貌相比,冰晶形貌为六角星状,主枝生长速率较慢,且无二次分枝出现,根部也未发生缩颈现象。当无量纲电场强度增加到 0.03 时,主枝生长速率明显减慢、优先生长方向未发生改变,但主枝出现竞向生长,各个主枝生长速率明显不同,六角星状对称冰晶形貌遭到破坏,变为不规则的六角形。随着无量纲电场强度的进一步增加,图 4(d)中主枝生长速率进一步减慢,且主枝逐渐消失,无明显的优先生长方向,冰晶形状由不规则的六角形变为边接近圆弧状的“四边形”。模拟结果与陈程等[26]在外加静电场为 40,100,160 kV/m 时观察到的红细胞悬液中冰晶的生长受到抑制、形状逐渐变为块状的试验结果一致。



（a）无量纲电场强度为0　（b）无量纲电场强度为0.01

（c）无量纲电场强度为0.03　（d）无量纲电场强度为0.05

图 4　加电场与不加电场冰晶充分生长后的形貌对照图

Figure 4　Comparison of the morphology of ice crystals with and without electric field after fully grown

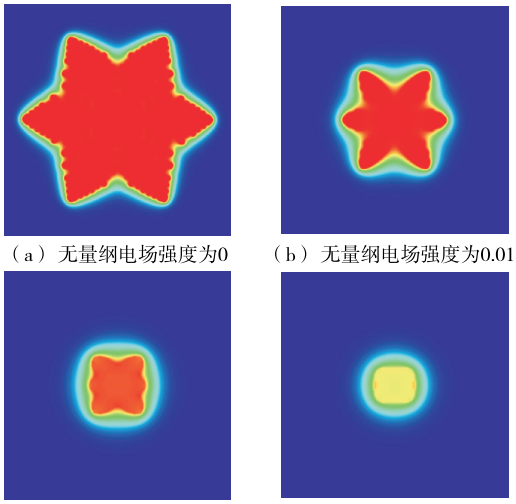
3.2.2　冰晶生长温度场分布　通过分析不同电场强度条件下冰晶充分生长后的温度场来探讨无量纲电场强度对冰晶生长的影响规律。从图 5 可以看出，随着无量纲电场强度的增加，晶核生成所处的温度越来越高，且对应的主枝的生长速率越来越低，意味着随着电场强度的增加，冰核的长大与冰晶主枝的生长都受到了抑制。这也验证了 Orlowska 等[4]试验得到的结论。

4　结论

（1）将相场法Kobayashi模型进行编程并计算，再将数据进行可视化，成功地再现了冰晶形态生长演化过程。模拟结果和其他模拟结果以及试验结果呈现的冰晶组织特征一致，冰晶形态具有典型的六重对称性。

（2）将电场自由能密度引入相场模型，成功探讨了无量纲电场强度对冰晶生长的影响规律。随着无量纲电场强度的增加，冰晶的主枝生长速率和成核生长都受到了抑制。外加无量纲电场强度为 0.01 时，冰晶形貌为六角星状，无二次分枝出现，根部也未发生缩颈现象。当无量纲电场强度加到 0.05 时，冰晶无明显的优先生长方向，形状也由不规则的六角形变为边接近圆弧状的“四边形”。

（3）在一定过冷度下，随着无量纲电场强度的增加，冰晶的生长受到抑制，形状逐渐变为块状，冰晶初始成核时的温度升高。根据模拟结果推测：在食品的速冻过程中，加以一定的电场强度，将会抑制食品中冰晶的生长，有望减少食品中细胞的机械损伤，更好地保留食品的品质和风味。



（a）无量纲电场强度为0　（b）无量纲电场强度为0.01

（c）无量纲电场强度为0.03　（d）无量纲电场强度为0.05

图 5　加电场与不加电场冰晶生长后的温度场对照图

Figure 5　The comparison chart of the temperature field after ice crystal growth with and without electric field

参考文献

[1] 张帅, 徐乐, 梁小慧, 等. 肉类冷冻解冻技术研究进展[J]. 食品安全质量检测学报, 2019, 10(16): 5 363-5 368.
ZHANG S, XU L, LIANG X H, et al. Research progress of freezing and defrosting technology of meat product[J]. Journal of Food Safety and Quality, 2019, 10(16): 5 363-5 368.

[2] 苏光明, HOSAHALLI S Ramaswamy, 于勇, 等. 牛肉高压冷冻过程中热变化和冰晶形态研究[J]. 农业机械学报, 2014, 45(3): 206-214.
SU G M, HOSAHALLI S Ramaswamy, YU Y, et al. Thermal behaviors and ice crystal properties in pressure shift freezing of beef[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(3): 206-214.

[3] 陈聪, 杨大章, 谢晶. 速冻食品的冰晶形态及辅助冻结方法研究进展[J]. 食品与机械, 2019, 35(8): 220-225.
CHEN C, YANG D Z, XIE J. Review on ice crystal shape and assisted freezing methods of quick-frozen food[J]. Food & Machinery, 2019, 35(8): 220-225.

[4] ORLOWSKA M, HAVET M, LE-BAIL A. Controlled ice nucleation under high voltage dc electrostatic field conditions[J]. Food Research International, 2009, 42(7): 879-884.

[5] XANTHAKIS E, HAVET M, CHEVALLIER S, et al. Effect of static electric field on ice crystal size reduction during freezing of pork meat[J]. Innovative Food Science and Emerging Technologies, 2013, 20(4): 115-120.

[6] 李侠, 钱书意, 杨方威, 等. 低压静电场下不同隔距冻结—解冻对牛肉品质的影响[J]. 农业工程学报, 2017, 33(8): 278-285.
LI X, QIAN S Y, YANG S W, et al. Effects of different gauges under low voltage electrostatic field assisting thawing-freezing on beef quality[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2017, 33(8): 278-285.

[7] 魏国平, 冯志刚, 熊双丽, 等. DENBA+静电场猪肉保鲜效果研

究[J]. 现代食品, 2019(23): 99-102, 105.
WEI G P, FENG Z G, XIONG S L, et al. Fresh-keeping effect of ENBA + electrostatic field on pork [J]. Food Science and Technology, 2019(23): 99-102, 105.

[8] 陈成, 陈铮, 杨涛, 等. 晶体相场模型的研究进展[J]. 材料导报, 2012, 26(9): 116-119, 141.
CHEN C, CHEN Z, YANG T, et al. Recent developments and future directions of phase field crystal model[J]. Materials Reports, 2012, 26(9): 116-119, 141.

[9] 陈梅英, 王文成, 陈锦权. 相场法模拟冷冻浓缩过程冰晶生长的可行性探讨[J]. 江西农业学报, 2010, 22(3): 137-139, 145.
CHEN M Y, WANG W C, CHEN J Q. Feasibility to simulate growth of ice crystals in process of frozen concentration by phase-field Model[J]. Acta Agriculturae Jiangxi, 2010, 22(3): 137-139, 145.

[10] KOBAYASHI Ryo. Modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1993, 63(3/4): 410-423.

[11] WHEELER A A, MURRAY B T, SCHAEFER R J. Computation of dendrites using a phase field model[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1993, 66(1/2): 243-262.

[12] KARMA A, RAPPEL W J. Phase-field method for computationally efficient modeling of solidification with arbitrary interface kinetics[J]. Physical Review E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, 1996, 53(4): 3 017-3 020.

[13] KIM S G, KIM W T, SUZUKI T. Phase-field model for binary alloys[J]. Physical Review E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, 1999, 60(6): 7 186-7 197.

[14] 龙文元, 蔡启舟, 魏伯康, 等. 相场法模拟多元合金过冷熔体中的枝晶生长[J]. 物理学报, 2006, 55(3): 1 341-1 345.
LONG W Y, CAI Q Z, WEI B K, et al. Simulation of dendritic growth of multicomponent alloys using phase-field method [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(3): 1 341-1 345.

[15] 陈梅英, 陈永雪, 王文成, 等. 冷冻浓缩过程冰晶生长的相场法模拟[J]. 福建农林大学学报(自然科学版), 2010, 39(5): 548-551.
CHEN M Y, CHEN Y X, WANG W C, et al. Phase-field simulation of the growth mechanism of ice crystals in the process of freeze concentration[J]. Journal of Fujian Agriculture and Forestry University (Natural Science Edition), 2010, 39(5): 548-551.

[16] 陈梅英, 冯力, 欧忠辉, 等. 基于相场法的液态食品冷冻浓缩冰晶生长数值模拟[J]. 农业工程学报, 2014, 30(3): 231-237, 293.
CHEN M Y, FENG L, OU Z H, et al. Numerical simulation of ice crystal growth of liquid food freeze concentration based on phase-field method [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2014, 30(3): 231-237, 293.

[17] 陈梅英, 卓艳云, 冯力, 等. 各向异性强度对冷冻浓缩过程冰晶生长影响的相场法模拟[J]. 中国农业大学学报, 2015, 20(3): 197-202.
CHEN M Y, ZHUO Y Y, FENG L, et al. Phase-field simulation of ice crystal growth by anisotropy influence on freeze concentration process[J]. Journal of China Agricultural University, 2015, 20(3): 197-202.

[18] 杨燕, 袁训锋, 乔希民, 等. 食品速冻保鲜过程冰晶生长相场模拟[J]. 食品与机械, 2018, 34(12): 108-114.
YANG Y, YUAN X F, QIAO X M, et al. Phase-field simulation of ice crystal growth on food quick-freezing preservation process[J]. Food & Machinery, 2018, 34(12): 108-114.

[19] 韩端锋, 王永魁, 鞠磊, 等. 六角冰晶生长过程的相场模拟[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2019, 40(9): 1 537-1 542.
HAN D F, WANG Y K, JU L, et al. Phase field simulation of the hexagonal ice crystal growth process[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2019, 40(9): 1 537-1 542.

[20] 韩端锋, 王永魁, 鞠磊, 等. 海水结冰过程中冰晶生长的相场模拟[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2020, 41(1): 1-8.
HAN D F, WANG Y K, JU L, et al. Phase field simulation of ice crystal growth in seawater freezing process[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2020, 41(1): 1-8.

[21] 白旭, 杨苏杰. 过冷度影响海水结冰形状与速度的相场模拟[J]. 上海交通大学学报, 2021, 55(5): 513-520.
BAI X, YANG S J. Simulation of undercooling influence on shape and velocity of seawater freezing process using phase field method[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2021, 55(5): 513-520.

[22] 周广钊, 王永欣, 刘崇, 等. 外电场作用下铁电畴极化反转机制的相场法模拟[J]. 中国科学: 技术科学, 2013, 43(5): 554-563.
ZHOU G Z, WANG Y X, LIU C, et al. Phase field method simulation of ferroelectric domain polarization reversal mechanism under the action of external electric field[J]. Science China Press, 2013, 43(5): 554-563.

[23] 孙伟, 徐晓斌, 张宏, 等. 电场作用下水分子转向极化和离子扰动对生物溶液相变过程的影响[J]. 低温工程, 2007(4): 19-23.
SUN W, XU X B, ZHANG H, et al. Effect of dipole polarization of water molecule and ion disturbing on phase transformation of biologic solution under electric field[J]. Cryogenics, 2007(4): 19-23.

[24] SHAH A, HAIDER A, SHAH S K. Numerical simulation of two-dimensional dendritic growth using phase-field model [J]. World Journal of Mechanics, 2014, 4(5): 128-136.

[25] 陶乐仁, 华泽钊. 低温保护剂溶液结晶过程的显微实验研究[J]. 工程热物理学报, 2001, 22(4): 481-484.
TAO L R, HUA Z Z. A microscopic study of the crystallization in cryoprotectent agents [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2001, 22(4): 481-484.

[26] 陈程, 陶乐仁, 华泽钊. 静电场对红细胞与冰晶间相互机械性作用的影响[J]. 低温工程, 2004(5): 45-49.
CHEN C, TAO L R, HUA Z Z. The effect of external electric field on the mechanical interactions between ice crystals and red blood cells during freezing[J]. Cryogenics, 2004(5): 45-49.